Prof. Angelo Serafino Caruso, Docente di Meccanica, Macchine ed Energia
Istituto Tecnico Industriale "E. Majorana" – Rossano (CS)

Le mie lezioni:

La Cinematica(2/3^)

La Cinematica del punto
Moto Rettilineo Uniforme e Accelerato
Formula di Torricelli

Moto Naturalmente Accelerato
Moto Circolare Uniforme, Periodo e Frequenza, Moto Armonico
Moto Circolare Uniformemente Vario e Accelerato
Accelerazione Centripeta, Centrifuga e Tangenziale
Moto Circolare Uniformemente Vario e Accelerato
Moti e Velocità Relativa, di Trascinamento e Assoluta

La Cinematica del punto

La cinematica studia il moto di un corpo in funzione del tempo, senza considerare le forze che l'hanno generato.

Esse, responsabili del moto, sono state già esaminate nella statica.

La cinematica distingue il moto di un punto da quello dei corpi rigidi,

Nel primo si osserva un corpo privo di dimensione ma con la massa concentrata nel baricentro, nel secondo caso i punti mantengono la loro mutua distanza pur compiendo traiettorie diverse.

Per costatare il movimento è necessario che l'osservatore sia in un sistema di riferimento ben definito perché la quiete e il moto sono concetti relativi.

Il moto è caratterizzato dalla **traiettoria che è la traccia descritta dal punto nel suo movimento.**

Nel caso di una traiettoria curvilinea, il punto si sposta seguendo la tangente alla curva in quel punto che ne identifica la direzione e il verso con un vettore.

Il legame che intercorre tra lo spazio percorso e il tempo impiegato a percorrerlo è la legge del moto o l'equazione oraria.

$$s = f(t)$$

Con "f" che indica il legame algebrico tra lo spazio "s" e il tempo "t".

Lo spazio è un "pezzo" di traiettoria percorso in un certo tempo.

La velocità media [m/s], $V_m = \Delta s=(s_2-s_1) \mid \Delta t=(t_2-t_1)$,

L'accelerazione media [m/s²], $a_m = \Delta V=(V_2-V_1) \mid \Delta t=(t_2-t_1)$.

Quindi, la Vm è il rapporto tra lo spazio percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo e la Am è uguale allo stesso rapporto però con la variazione della velocità ΔV al numeratore.

In termini matematici, l'accelerazione è la derivata della velocità "dv/dt" e la velocità è la derivata dello spazio "ds/dt", entrambi rispetto al tempo.

Premessa

Nello studio intrapreso considereremo solo traiettorie rettilinee e circolari, tutte le altre saranno ridotte a queste due, la velocità e l'accelerazione saranno considerate costanti.

Inoltre e in generale, mutando i segni i moti diventano retrogradi o ritardati.

Moto Rettilineo Uniforme

E' quando un punto, a velocità costante, si muove su una traiettoria rettilinea e gli spazi percorsi sono direttamente proporzionali ai tempi impiegati a percorrerli: Es. se si percorrono 10 m in 10 secondi, si percorreranno 20 m in 20 secondi e 5 m in 5 secondi e così via.

Segue, $v = s/t = Cost$ e $a = 0$

Un punto in movimento al tempo $t=0$ che ha già percorso lo spazio "s_0" trasforma la $s = vt$ nella $s=s_0+vt$

Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato

E' il moto di un punto che passa da una velocità iniziale "Vo" a quella più sostenuta "Vm" con accelerazione costante e in un tempo $\Delta t=(t-t_o)$.

Con $t_o=0$ si ha $a= V-V_o/t-0 = Cost$, segue

$V-V_o = at$ e, quindi,

$$V= V_o + at$$

Ma, siccome, la velocità media $V_m = V+V_o/2$ possiamo introdurre in questa la V precedente, per ottenere:

$$V_m= (V_o+at)+ V_o/2 = V_o+ ½\ at$$

e, per finire, introducendo quest'ultima nella $s= V_m \times t$ si ricava

$$s = V_o\, t + ½\ a\, t^2$$

che ci da l'espressione dello spazio con velocità iniziale Vo.

La Formula di Torricelli

Torricelli (scienziato del XV! secolo), operando
con le formule del moto rettilineo uniformemente accelerato,
nel caso in cui
la velocità iniziale $Vo=0$ e lo spazio iniziale $So=0$,
le semplificò in $V=at$ e $S=½at^2$ e le mise a sistema
poi moltiplicò il secondo membro per una stessa quantità (a/a)
ottenendo $S = ½\, at^2 \times a/a = ½\, a^2t^2/a = ½\, V^2/a = S$
e, esplicitando la V, si ottiene che $V=\sqrt{2\, a\, s}$
Essa consente di trovare
la velocità finale del punto conoscendo lo spazio e accelerazione.

<u>Moto Naturalmente Accelerato</u>

E' il moto rettilineo uniformemente accelerato riferito ai corpi, non vincolati e con velocità iniziale nulla ($V_o=0$), che cadono nel campo gravitazionale terrestre assoggettati solo alla gravità.

L'accelerazione di gravità si può considerare costante, sulla terra vale 9,81 [m/s^2] e viene indicata con la lettera "g".

Galilei (XV-XVI secolo) scoprì che i gravi cadono con la stessa legge del moto se si trascura l'effetto dell'aria, e Newton (XVI-XVII secolo) ne misurò il tempo di caduta constatando che è lo stesso per tutti i corpi.

Quindi, per un grave che cade con velocità iniziale nulla si ha: $h=\frac{1}{2}gt^2$, essendo $V=gt$ si ha $t=V/g$, per cui $h=\frac{1}{2}g(V^2/g^2)=\frac{1}{2}V^2/g$

da cui segue **$V=\sqrt{2gh}$ che è la Formula di Torricelli**

con $a=g$ e $s=h$ (altezza di caduta).

La velocità del moto naturalmente accelerato, quindi, non è altro che quella trovata già da Torricelli.

Moto Circolare Uniforme

Esso è il moto di un punto che si muove su una traiettoria circolare di raggio "r" con velocità costante nel tempo.

Lo spazio percorso è riferito all'arco di circonferenza s=Po-P nel tempo $\Delta t = t - to$.

La velocità periferica o tangenziale (vettore tangente alla circonferenza nel punto Po che si sposta in P) è

$$V = s/t = Po-P/t-to = Cost.$$

La velocità angolare "w", rapporto tra l'angolo "∂" compreso tra il raggio OPo e OP e il "t" inpiegato,

$$w = \partial / t \quad [rad/s]$$

Tutti i punti sul raggio descrivono lo stesso angolo "∂" per cui la velocità angolare è la stessa, mentre la velocità periferica "V" aumenta sui raggi crescenti.

Se punto sulla circonferenza percorre in un giro di lunghezza "$l=2\pi r$" in un minuto, lo spazio percorso in "n" minuti sarà "$s=2\pi rn$"

La velocotà periferica: **$V=s/t$ = $2\pi rn/60$** secondi [m/s]

dove n è in giri/minuti e r in metri

La velocità angolare: **$w = \partial/t = 2\pi r/60$** [rad/s]

sostituendo nella V il valore di **w** ottengo

$V = w\ r$ che per w=cost , la velocità periferica o tangenziale varia linearmente con il raggio della circonferenza.

Periodo e Frequenza

La velocità angolare "ω" si può esprimere anche come: $\omega = 2\pi/T$

al denominatore c'è il periodo [T (t maiuscola) = $t/n = 60/n$ (secondi)] ,

il periodo è il tempo impiegato da un punto per compiere un giro

e anche come $\omega=2\pi f$ (con $f=n/t=n/60$), insomma è $1/T$, l'inverso del periodo.

La frequenza "f", o pulsazione, è il numero di giri compiuti

in un secondo da un corpo in moto circolare.

Moto Armonico

Nei motori alternativi (macchine motrici o operatrici) i moti sono periodici

e, in particolare sono semplicemente armonici, quindi:

Un punto si muove di moto armonico quando percorre, ripetutamente e

alternativamente nei due versi, un tratto rettilineo e

i suoi spostamenti variano col legge "sinusoidale" nel tempo.

Accelerazione Centripeta e Centrifuga

Il vettore velocità periferica o tangenziale che di muove
sulla circonferenza cambia continuamente direzione mantenendosi sempre tangente alla traiettoria circolare,è sempre perpendicolare al raggio e il verso segue la rotazione del punto in movimento.

Nel moto circolare uniforme la velocità è costante per cui non c'è accelerazione, però il cambiamento di direzione del vettore velocità sulla circonferenza procura una variazione di velocità non numerica ma in direzione responsabile dell'accelerazione centripeta.

Essa è un vettore diretto radialmente verso il centro della traiettoria e applicato in mezzo alla corda che tende l'arco ai cui estremi sono applicati i vettori velocità tangenziale o periferici.

$a_{cp} = V^2/r$ per $V = \omega r$ si ha $a_{cp} = \omega^2 r = \omega V$ [m/s²]

L'accelerazione Centrifuga si distingue solo per il sistema di riferimento.

Moto Circolare Uniformemente Vario

Il presupposto del moto circolare uniforme è che il corpo si muove con velocità costante,ma se la velocità variasse nascerebbe un'accelerazione costante che darebbe origine al moto circolare uniformemente vario.
Si è visto che c'erano due velocità, la periferica o tangenziale e l'angolare, per cui ci saranno anche le due accelerazioni omonime.

Moto Circolare Uniformemente Accelerato

Si definisce così il moto di un punto che in un certo tempo passa da una velocità angolare ad un'altra superiore con un'accelerazione angolare "ε" costante.

$$\varepsilon = \omega - \omega_0 / t = cost \quad [rad/s^2]$$

Le legge fisiche del moto rettilineo uniformemente accelerato sono applicabili anche al moto circolare uniforme accelerato, infatti, con riferimento all'esposizione n.5, basta sostituire i valori angolari della velocità "ω con V" e dello spostamento "∂ con s" per ottenere le nuove formule applicabili al moto in oggetto:

$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ (velocità angolare)

$\partial = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$ (spostamento angolare)

per un punto che parte con una velocità iniziale: $\partial = \partial_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$

per un punto mobile che parte da fermo ($\omega_0 = 0$ e $\partial_0 = 0$):

$\varepsilon = \omega / t$; $\omega = \varepsilon t$; $\partial = \frac{1}{2} \varepsilon t^2$

L'Accelerazione Tangenziale

Nel moto circolare uniformemente vario ci sono due accelerazioni, una angolare

"ε" e l'altra **periferica o tangenziale "a_t"**

generata dalla variazione dell'intensità della velocità tangenziale.

[N.B. **NON** dalla variazione della direzione del vettore tangente alla curva che, appunto, genera l'accelerazione centripeta o centrifuga]

Allora, essendo $V = \omega r$ dividendo per t entrambi i membri si ottiene

$V/t = \omega r/t$ dove il primo membro è l'accelerazione tangenziale "a_t"

e il secondo è l'accelerazione angolare "ε" segue $a_t = \varepsilon \times r$,

Siccome a_t e a_{cp} si muovono insieme e perpendicolarmente a se stesse si può

considerare la componete $a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}$

Moti e Velocità Relativa, di Trascinamento e Assoluta

Galileo Galilei, già nel 1632 nei suoi "Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo" con il principio di trasformazione e dell'invarianza studiò i moti e le velocità relative concludendo che gli stati di movimento uniforme e di quiete sono equivalenti e intercambiabili, contraddicendo Aristotele che li riteneva assoluti e non relativi.

Un aereo, per esempio, rulla alla velocità "Vr" sulla pista di una portaerei che naviga orizzontalmente con velocità "Vt" rispetto al guardiano di un faro sito su un promontorio.
Quanto vale la velocità "Va" dell'aereo rispetto al guardiano del faro?

La velocità $Va = Vt + Vr$

E la velocità "Vdf" e "Vdp" dell'aereo dopo il decollo, rispetto al guardiano del Faro e sia rispetto al capitano della Portaerei?

Rispetto al Guardiano del faro,

la velocità $Vdf = Vad$ (velocità dell'aereo dopo il decollo)

Rispetto al Capitano della portaerei,

la velocità $Vdp = Vad - Vp$

(velocità dell'aereo dopo il decollo − Velocità della portaerei)

Quindi, definiamo:

- Vr è la velocità dell'aereo calcolata rispetto al sistema di riferimento mobile (portaerei);
- Vt è la velocità del sistema mobile (portaerei) che a sua volta si sposta rispetto al sistema di riferimento fisso (faro);
- Va è la velocità del sistema mobile (aereo) rispetto al sistema di riferimento fisso (faro).

Se analizzassimo il problema dal punto di visto delle distanze, per l'aereo ancora nella fase di rullaggio, si avrebbe:

$$Saf = Sap + Spf$$

con Saf (distanza aereo-faro), Sak (aereo-portaerei), Spf (portaerei-faro).

e, siccome, $Sap = Vr \times t$ e $Spf = Vt \times t$

Si conclude che $Saf = Vr \times t + Vt \times t$

Sulla Cinematica dei Corpi Rigidi

L'argomento sarà ripreso nelle materie specifiche per i sistemi di spinta e articolati, manovellismi nelle macchine utensili e nei motori.

Qui, si accenna al moto di un corpo rigido che è determinato quando si conoscono tre dei suoi punti non allineati e, se il moto è parallelo ad un piano,basterebbero solo due punti, il moto può essere traslatorio o rotatorio.