

*Prof. Angelo Serafino Caruso, Docente di Meccanica, Macchine ed Energia
Istituto Tecnico Industriale "E. Majorana" – Rossano (CS)*

Le mie lezioni:

La Statica (1/3[^])

Le forze, grandezze vettoriali

9 Momenti e le Coppie

Sistema di Forze in Equilibrio Statico

Le Equazioni Cardinali della Statica

Vincoli, Reazioni, Gradi di libertà

Le travi Isostatiche, Labili e Iperstatiche

Le macchine Semplici: La Leva

(Carrucola, Paranco, Verricello e Argano)

Piano Inclinato (Cuneo e Vite)

Le forze, grandezze vettoriali

La forza, la velocità, l'accelerazione, ma in generale tutto ciò che rappresenta un'azione è una grandezza vettoriale.

Un vettore è costituito dalla direzione, dal verso, dall'intensità e dal punto di applicazione:

a) La direzione è la retta d'azione lungo la quale agisce;

b) Il verso indica l'orientamento sulla retta d'azione e ne rappresenta la testa;

c) L'intensità o modulo è la misura;

d) Il punto di applicazione è il punto vincolante e ne indica la coda.

Le forze applicate ad un corpo formano un sistema di forze che singolarmente sono dette componenti mentre, quella capace di produrre lo stesso effetto delle componenti è detta risultante, l'opposta, in intensità, direzione e verso, è l'equilibrante.

Le forze che non mutano direzione, verso e intensità ma spostano il punto di applicazione lungo la propria retta d'azione sono equivalenti.

Se, invece, agiscono su rette d'azione diverse sono equipollenti:

Un vettore, quindi, si può spostare lungo la propria retta d'azione e parallelamente a se stesso perché conservano il verso, la direzione e l'intensità.

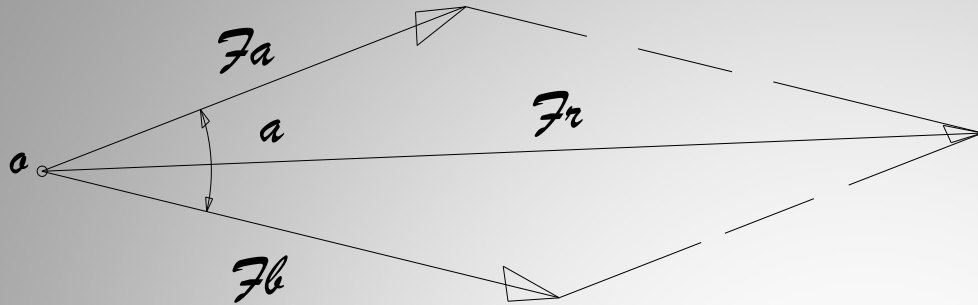
*Un sistema di forze si dice **complanare** se agisce sullo stesso piano.*

*La forza è la causa del moto di un corpo o della sua deformazione, essa vince l'inerzia, da cui deriva il **Principio d'Inerzia**.*

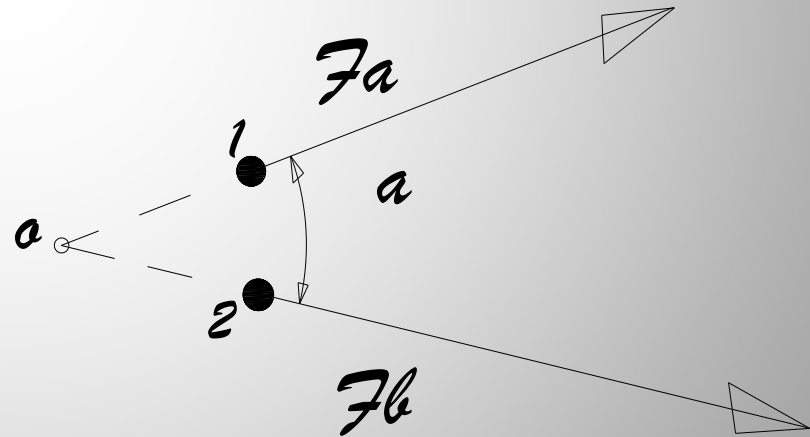
Per esempio, un cavallo che parte al galoppo tende a disarcionare all'indietro il cavaliere, oppure, se si ferma di colpo, lo sbalza in avanti.

Un sistema di forze, applicato in uno stesso punto "O", sia costituito da due componenti " F_a " e " F_b " le cui direzioni formano un angolo "a", la forza risultante, cioè la somma delle due, sarà la " F_r ", rappresentata dalla diagonale del parallelogramma racchiuso dalle parallele delle due forze concorrenti, come rappresentato:

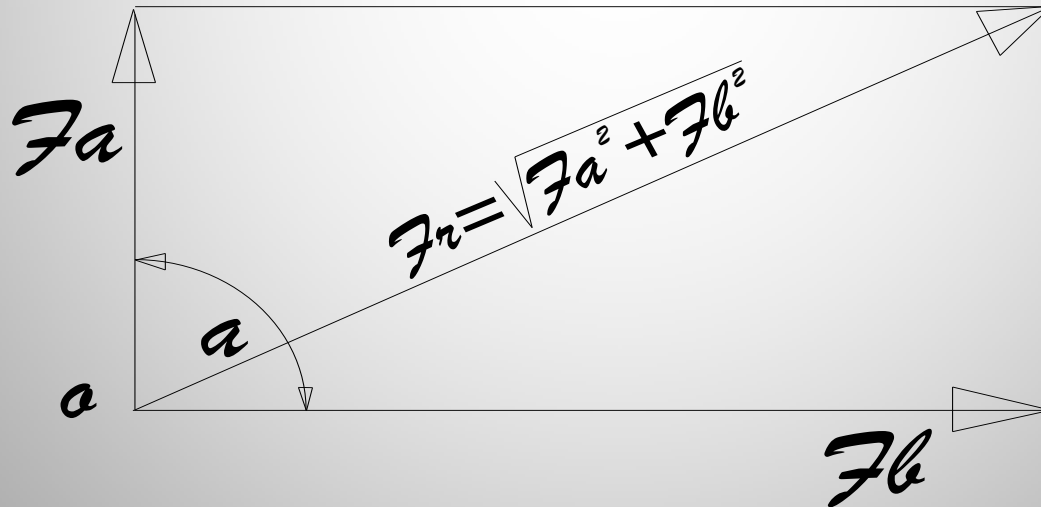
Nel caso in cui le forze " F_a " e " F_b " abbiano il punto di applicazione non coincidente e lungo le loro rette d'azione esse si dicono convergenti, figura sottostante.



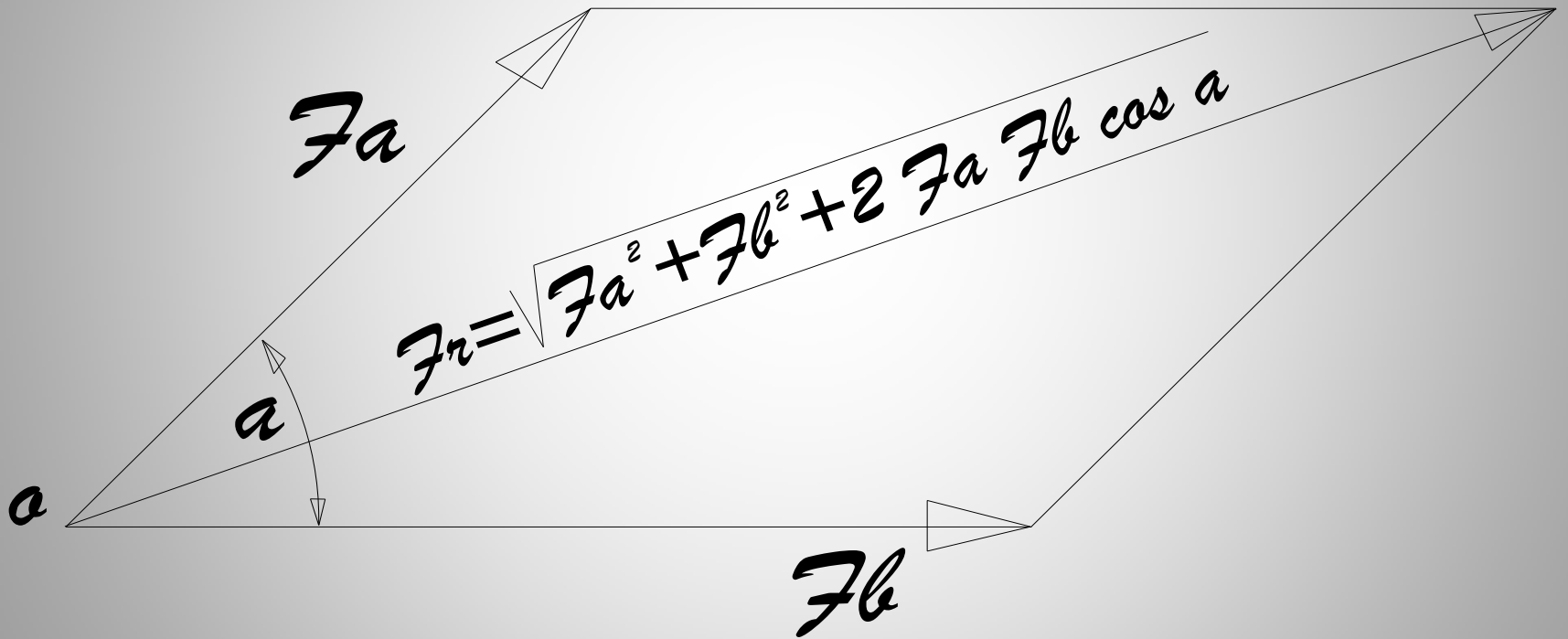
Per cui, nel caso in cui si cerca la risultante delle forze " F_a " e " F_b ", si spostano lungo la loro retta d'azione nel punto " O " e si sommano componendole come nella figura precedente



Il metodo del parallelogramma, in un disegno in scala o su carta millimetrata, ci permette di calcolare il valore assoluto (moduli o intensità) delle forze che sottostanno alle quattro operazioni elementari. Infatti se l'angolo compreso tra le forze è di 90 gradi ci rifaremo ad un rettangolo la cui risultante è la diagonale del triangolo inscritto dalle componenti, il Teorema di Pitagora: $F_r = \sqrt{F_a^2 + F_b^2}$ servirà allo scopo.



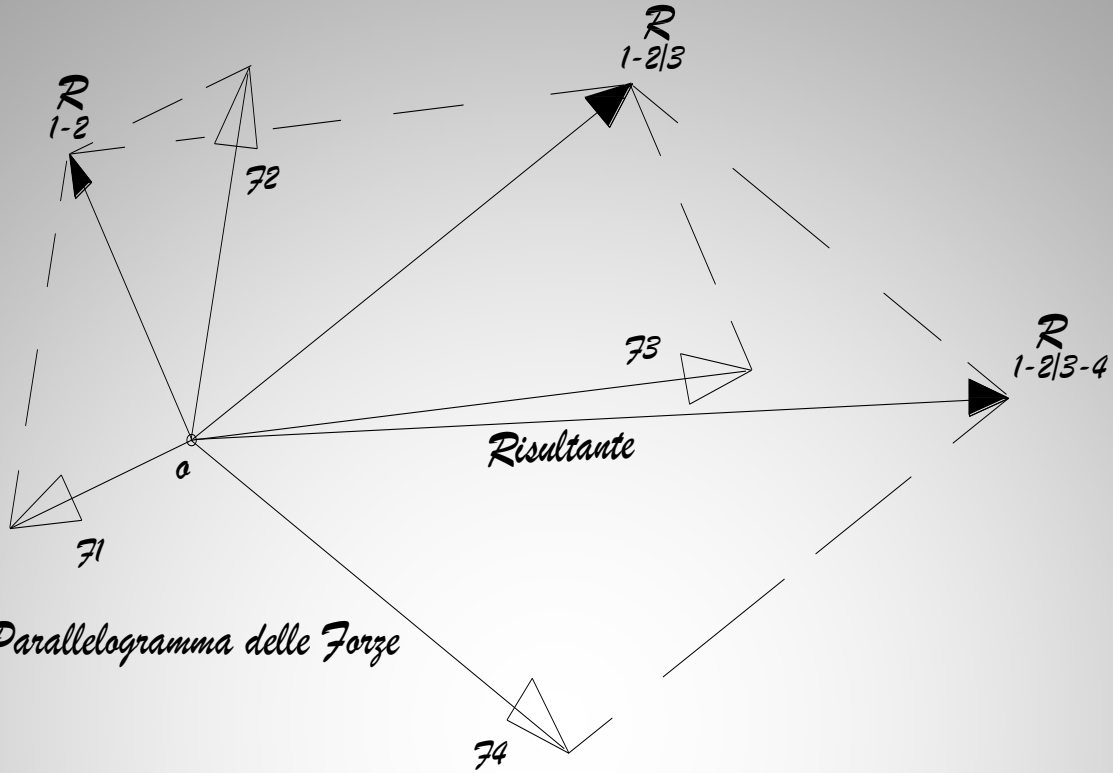
*Se invece, l'angolo è inferiore a 90 gradi si userà
il Teorema di Carnot*



Metodi grafici con più forze complanari e concorrenti

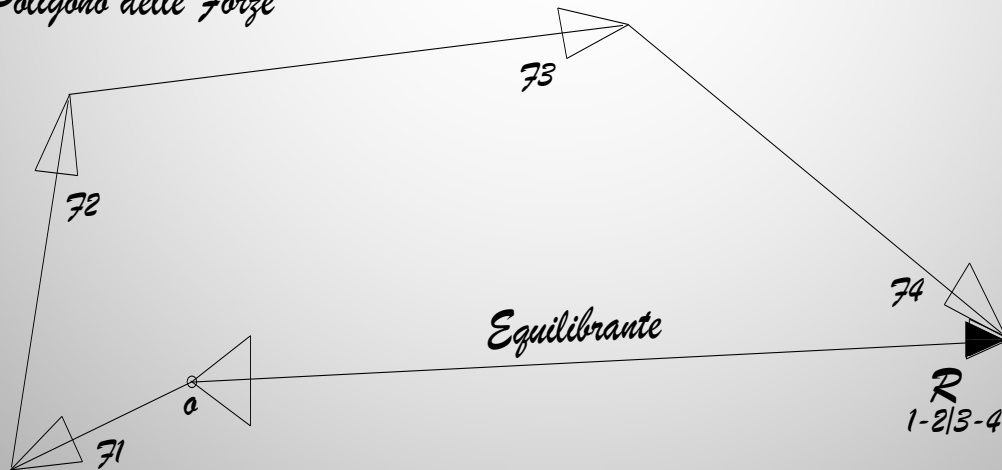
Il metodo del parallelogramma si presta anche nel caso di più forze e si evolve, semplificandolo, con il metodo grafico detto del poligono delle forze che non è altro che una spezzata chiusa con il suo punto estremo (testa) coincidente con il punto di applicazione (coda), nel caso in cui il sistema è "equilibrato", il poligono delle forze si chiude su stesso, annullando gli effetti : Risultante nulla perché uguale e opposta all'equilibrante [matematicamente, con il segno inverso "+" o "-"]. Le forze riportate , parallelamente a se stesse e in "testa>coda", per bilanciare l'intero sistema si devono rincorrere,

Si chiarisce, quanto evidenziato, con un'applicazione in scala.



Parallelogramma delle Forze

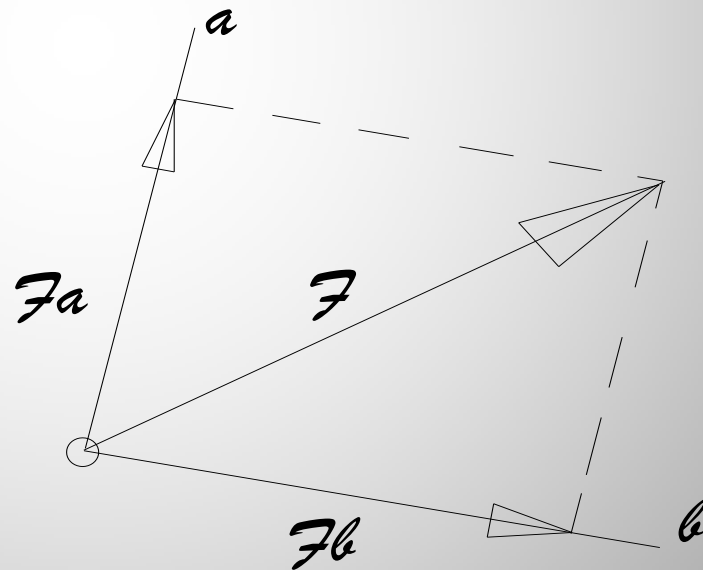
Poligono delle Forze



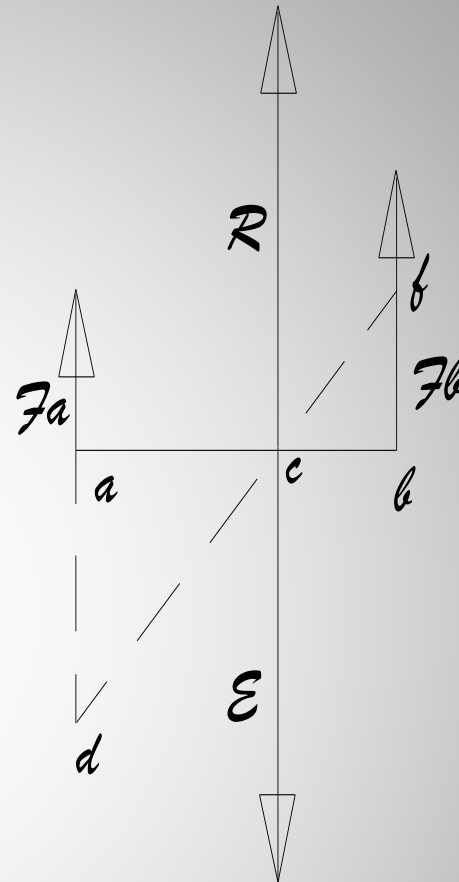
Scomposizione di una forza

Il metodo del parallelogramma si può usare al contrario, non per comporre le forze ma per scomporle. Infatti se avessimo una forza "F" nel piano della lavagna di cui conoscessimo le grandezze caratteristiche (direzione, verso e modulo), essa si scomporrebbe nelle due direzioni date a e b per divenire componenti F_a e F_b .

Il metodo grafico è intuitivo, quello analitico richiama la scomposizione dei triangoli; Teorema di Pitagora e di Carnot ma anche trigonometria.

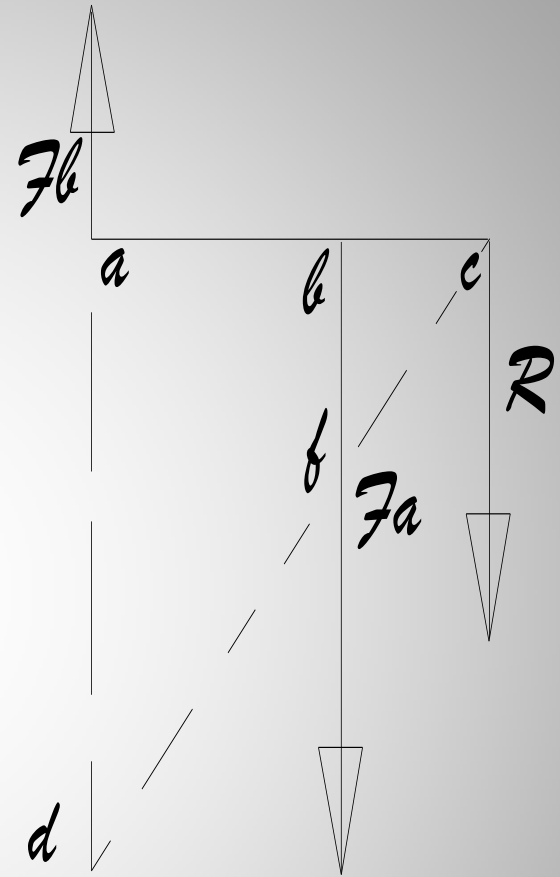


La composizione di due forze parallele concordi è un problema frequente nelle travi: La risultante è una forza di modulo $R = F_a + F_b$, con verso e direzione conforme. Il punto di applicazione "c" sarà posizionato secondo la proporzione: $R/F_b = ab/ac$, segue $ac = ab \times F_b/R$ che è l'incognita. Quindi, se la R è la risultante, la E è la forza equilibrante.



Il punto "c" si può trovare anche per Via grafica: Si costruisca sulla retta d'azione di F_a il segmento pari a F_b e su F_b il tratto F_a , il punto "c" sarà l'intersezione della linea df con la ab .

Nel caso di composizione di due forze parallele e discordi, la risultante ha il modulo pari a $R = F_a - F_b$, è una forza con direzione conforme e verso come quella più grande (F_a). Il punto di applicazione "c" sarà posizionato all'esterno del tratto "ab" dalla parte della forza maggiore. La proporzione: $R/F_b = ab/bc$, segue $bc = ab \times F_b/R$ che è l'incognita,



Il punto "c" si può trovare anche per via grafica: Si costruisca sulla retta d'azione di F_b il segmento pari a F_a e su F_a il tratto F_b , il punto "c" sarà il punto intersecante la linea df con la ab .

Momento di una forza

La forza, in effetti, provoca solo la traslazione del corpo se non ci sono ostacoli che ne impediscono il movimento.

Supponiamo che un corpo, che scivola su una superficie priva di attrito, trovi un ostacolo, esso si ribalterà ruotando intorno al punto d'inciampo.

La rotazione, a prescindere dall'intensità della forza, sarà maggiore se più grande è la distanza dal punto di applicazione.

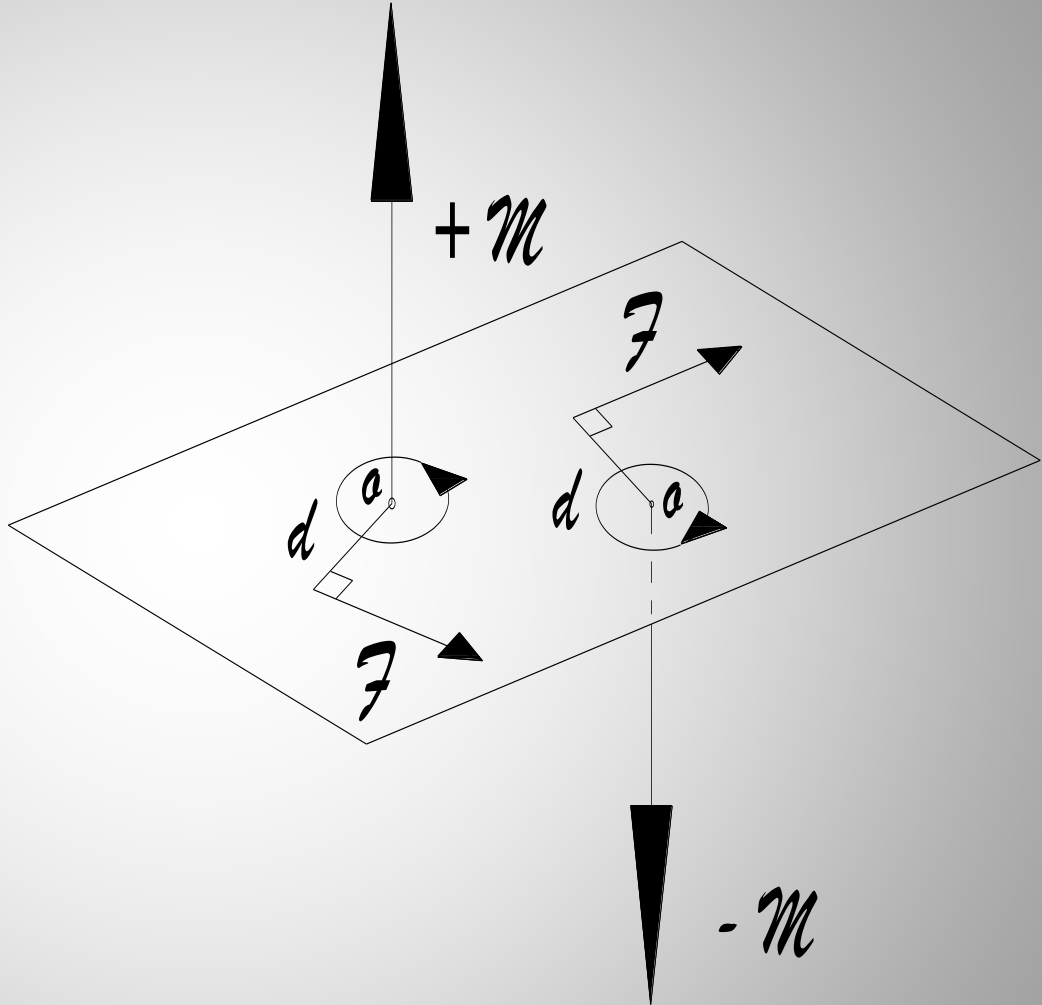
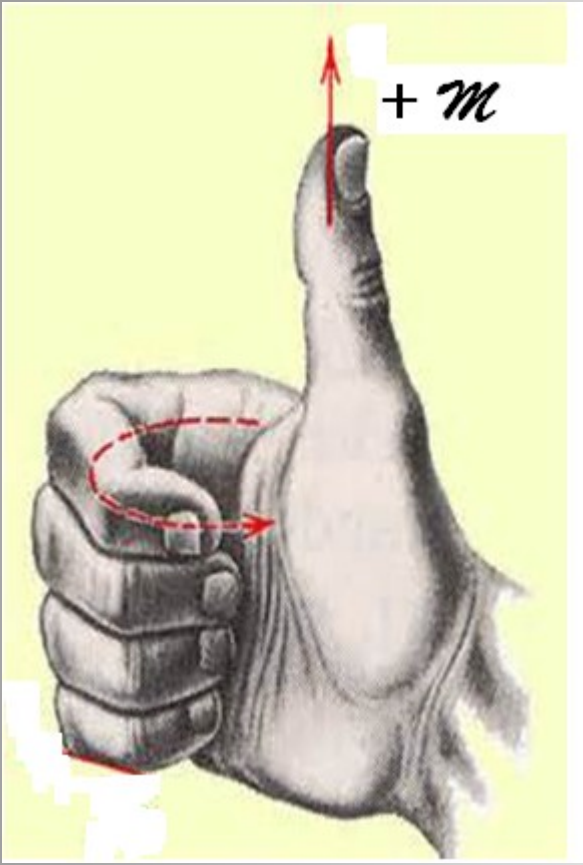
Nasce così il momento di una forza " $M = F \cdot d$ ", che è una grandezza vettoriale con " M " definito modulo o intensità e con " d " braccio.

Il momento avrà un punto di applicazione "o" dal quale spiccherà perpendicolarmente la "direzione" e il "verso".

Il verso indica il senso di rotazione ed è fissato per convenzione dalla "regola della mano destra": Positivo se la rotazione è in senso antiorario e il vettore momento "esce dal piano verso l'alto",

negativo nel caso contrario. La figura seguente chiarisce.

Regola della mano destra



Teorema di Varignon

Il momento risultante di un sistema di forze complanari, rispetto al punto "o" qualsiasi del piano, è uguale alla somma algebrica dei momenti delle singole forze rispetto al punto stesso.

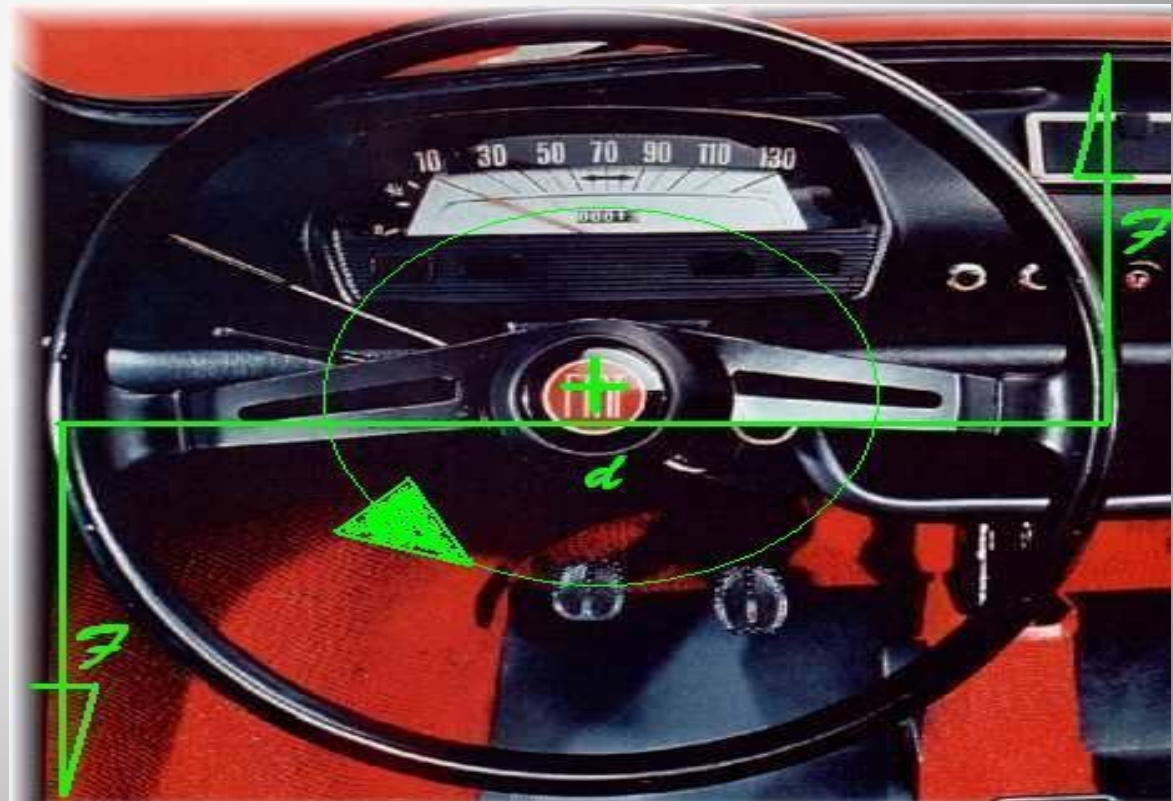
$$MR = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 \dots F_n \cdot d_n$$

La coppia

Un sistema costituito da due forze parallele aventi la stessa

intensità e versi opposti è detta coppia: $M = F \cdot d$.

Il momento è un vettore uscente dal volante verso "gli occhi del conducente"



Baricentro di un corpo o Centro di Gravità

Esso è costituito dall'insieme delle particelle che compongono il corpo soggette singolarmente alla forza di gravità, nel complesso non è altro che la risultante delle forze agenti sulle singole particelle e applicata nel centro di gravità, per l'appunto baricentro.

Sistema di Forze in Equilibrio Statico

Si ha questa situazione quando un corpo, pur sollecitato da un sistema di forze, rimane in quiete.

Abbiamo già visto che un sistema di forze può essere ridotto alla risultante di una forza e di una coppia e, nel caso che fossero nulle, il sistema sarà in equilibrio e il poligono delle forze sarà chiuso.

Le Equazioni Cardinali della Statica

Un sistema di assi cartesiani "x-y" è, come dire, il piano della lavagna con l'asse "x, ascissa" (parallela al pavimento), e l'asse "y, ordinata" (parallela al muro perimetrale), questo sarà il "quadrante" di riferimento per studiare il sistema di forze complanari agenti sul corpo libero, le cui possibilità di movimento sono:

- 1) Una traslazione nella direzione delle ascisse;
- 2) Una traslazione nella direzione delle ordinate;
- 3) Una rotazione nel piano "x-y".

Queste tre possibilità di movimento sono dette anche "gradi di libertà" ai quali si oppongono le "reazioni o vincoli" che ne impediscono il moto.

In maniera esplicita, le equazioni cardinali si possono scrivere sostituendo al sistema di forze le loro componenti secondo gli assi x-y.

Quindi, riportiamo il sistema delle tre equazioni con le tre incognite

$$1) R_x = \sum F_{ix} = 0$$

$$2) R_y = \sum F_{iy} = 0$$

$$3) M_r = \sum F_{ix} \cdot d_{ix} + \sum F_{iy} \cdot d_{iy} = 0$$

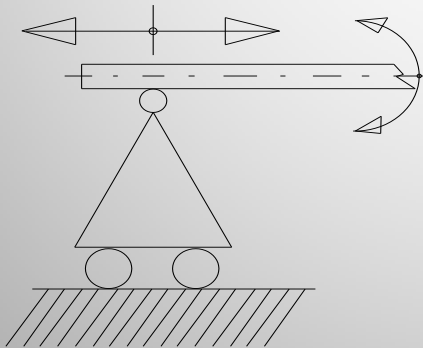
Dove: \sum è la sommatoria algebrica, F_{ix} e F_{iy} sono le componenti delle forze rispettivamente lungo gli assi e d_{ix} e d_{iy} sono le distanze (bracci) fra le rette d'azione dei componenti e l'origine degli assi.

Per un sistema in equilibrio, le equazioni si riducono:

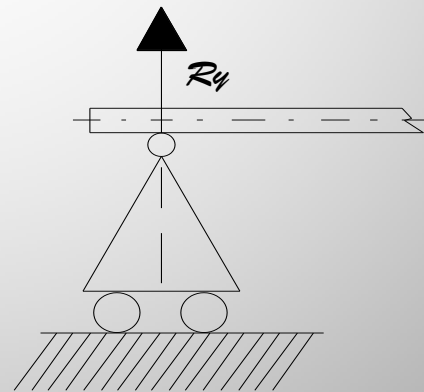
$$a) R_x = 0 \text{ e } R_y = 0 \text{ con } M_r = 0$$

Appoggio semplice o carrello

Gradi di Libertà n. 2

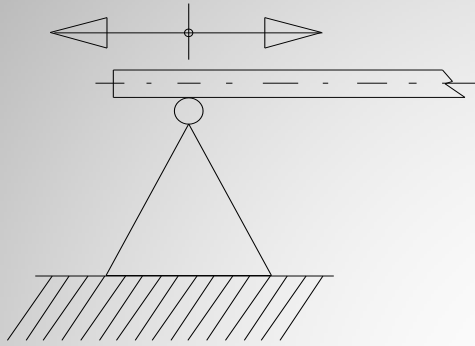


Vincoli o Reazioni n. 1

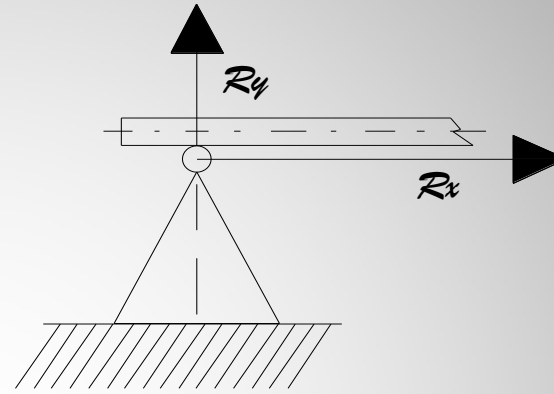


Cerniera

Gradi di Libertà n.1

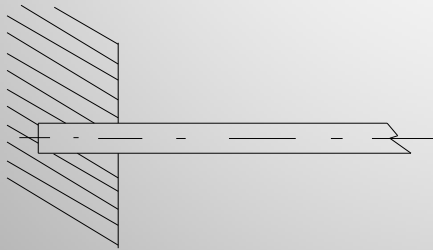


Vincoli o Reazioni n.2

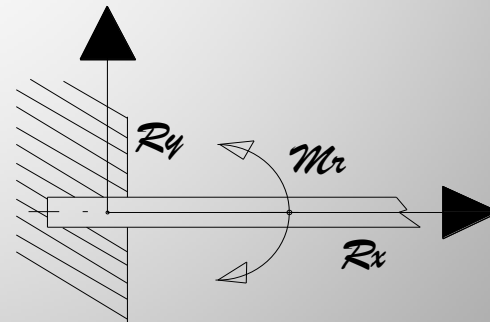


Incastro

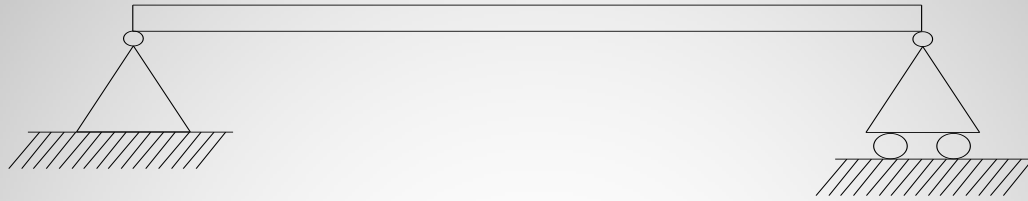
Gradi di Libertà n.0



Vincoli o Reazioni n.3



Le Travi Staticamente Determinate

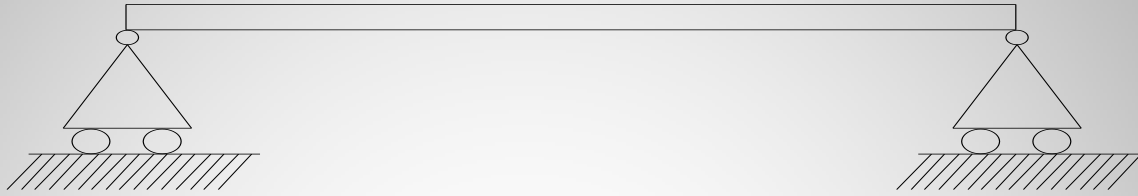


Si consegue, quindi, l'equilibrio quando il sistema di forze soddisfa le tre equazioni cardinali della statica e le reazioni vincolari incognite non sono superiori alle tre equazioni di equilibrio.

In questo caso il problema è risolvibile.

Infatti, la cerniera ha due reazioni e il carrello ne ha una, per totale di tre. La struttura è Isostatica e Staticamente Determinata.

Le Travi Labili



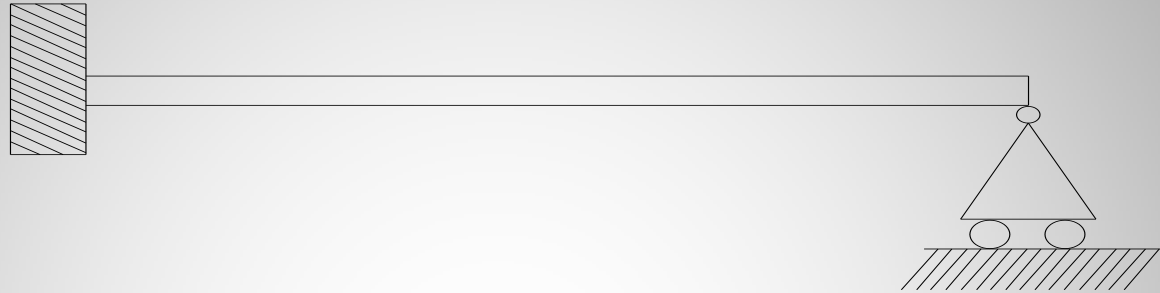
Se il numero dei vincoli è inferiore al numero delle equazioni cardinali (che sono tre), significa che i gradi di libertà della struttura non possono essere eliminati e la struttura è labile, non è in condizione di equilibrio.

In questo caso il problema è impossibile

perché le equazioni della statica diventano prive di significato.

Infatti, un carrello ha una reazione e l'altro carrello ne ha un'altra, per totale di due.

Le Travi Iperstatiche



Se il numero dei vincoli è superiore (sovraabbondanti) al numero delle equazioni cardinali (che sono tre), significa che non ci sono gradi di libertà nella struttura e la struttura è iperstatica perché l'incastro impedisce ogni tipo di movimento.

In questo caso il problema è staticamente indeterminato. Infatti, l'incastro ha tre reazioni e il carrello ne ha una, per totale di quattro.

Solleverare, spostare e trasportare pesi è stato da sempre un'esigenza primordiale che ha sollecitato l'intelletto umano per moderare il lavoro e la fatica o, meglio, per moltiplicare la propria forza muscolare. E' da qui che è nata l'esigenza di costruire i dispositivi delle

Macchine Semplici.

Le macchine hanno un coefficiente caratteristico detto "vantaggio" che viene definito da $\mathcal{K} = R/P$

con R , forza resistente o resistenza e P , forza motrice o potenza.

Se $\mathcal{K} > 1$, la macchina è vantaggiosa;

Se $\mathcal{K} = 1$, la macchina è indifferente;

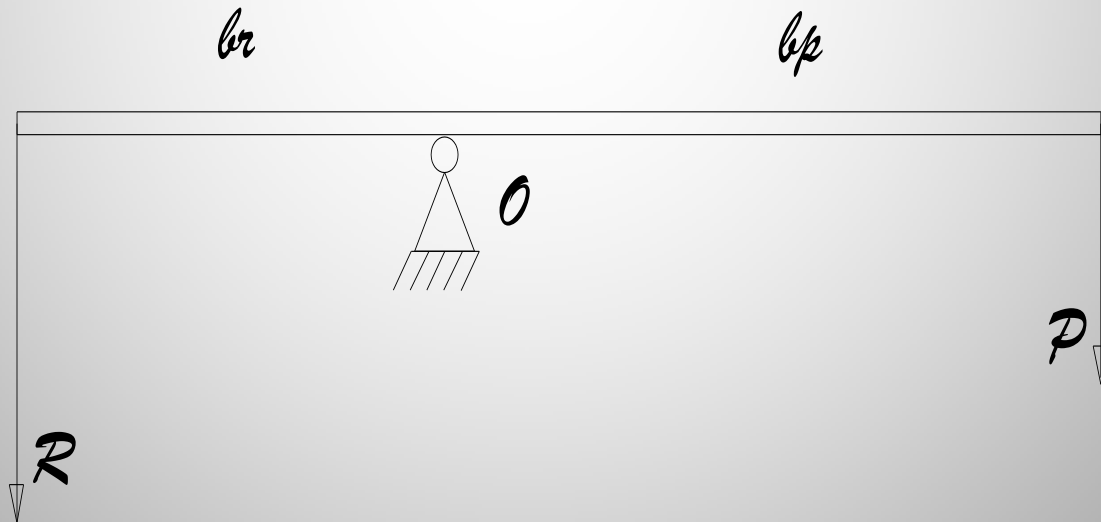
Se $\mathcal{K} < 1$, la macchina è svantaggiosa.

Per lo studio e l'equilibrio delle macchine semplici si suppone l'assenza dell'attrito, si applicano le equazioni cardinali della statica alle forze, si determina la forza motrice in funzione di quella resistente, si valutano le caratteristiche geometriche della macchina fino alla valutazione del vantaggio.

*Le macchine semplici si riducono alla
leva e al piano inclinato,*

*dalla prima deriva la carrucola, il paranco, il verricello e l'argano
e dal secondo la vite e il cuneo.*

*La leva è una trave che ruota intorno al fulcro nel punto "o" i cui bracci,
"br" e "bp", sono rispettivamente le distanze
dalla resistenza "R" e dalla potenza "P".*



Per l'equilibrio il momento generato dalla rotazione (positiva "+") della resistenza, rispetto al fulcro, deve essere uguale a quello (negativo "-") del vettore potenza intorno ad "O".

$$M_r - M_p = 0 \text{ per cui si ha: } R \times l_r = P \times l_p$$

da cui la proporzione: $R/P = l_p/l_r$ (si ricorda che $K = R/P$)

La leva, quindi, è in equilibrio quando la Resistenza e la Potenza sono inversamente proporzionali ai rispettivi bracci.

Quando il fulcro è al centro delle forze applicate alla trave,

la leva sarà di primo genere

per $K = 1$ sarà $l_p = l_r$ (indifferente)

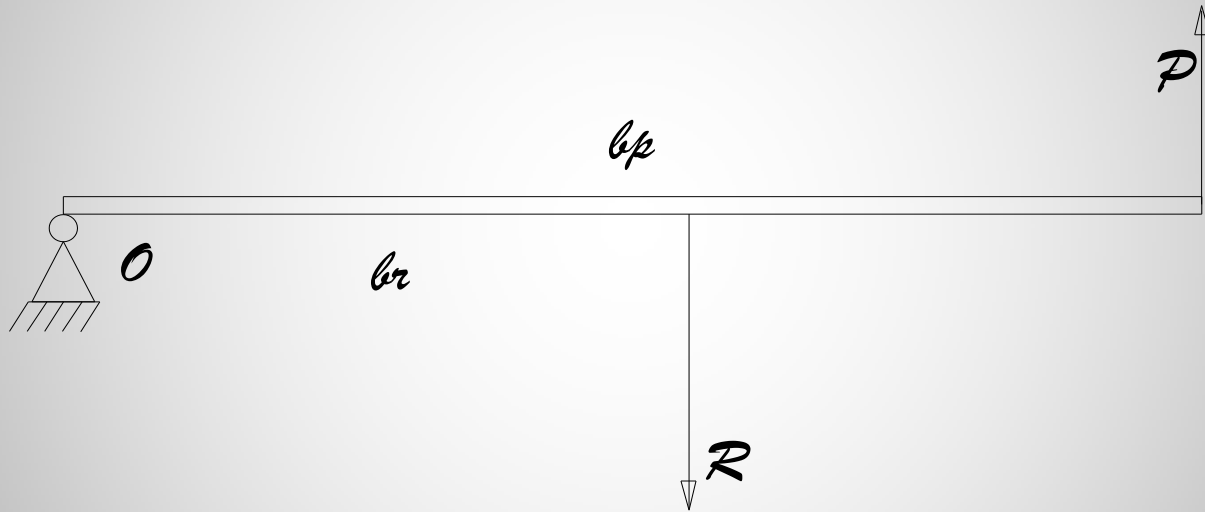
per $K > 1$ sarà $l_p/l_r > 1$ (vantaggiosa) (è la leva quella in figura, il vantaggio è tanto maggiore quanto più vicino è la resistenza al fulcro)

Per $K < 1$ sarà $l_p/l_r < 1$ (svantaggiosa) (lo svantaggio è tanto maggiore quanto più vicino è la potenza al fulcro).

La leva è del secondo genere

quando il fulcro è ad un'estremità e la resistenza è applicata tra il fulcro e la potenza.

Questo tipo di leva è sempre vantaggiosa, infatti per l'equilibrio dei momenti si ha: $P \times b_p - R \times b_r = 0$ e $P \times b_p = R \times b_r$

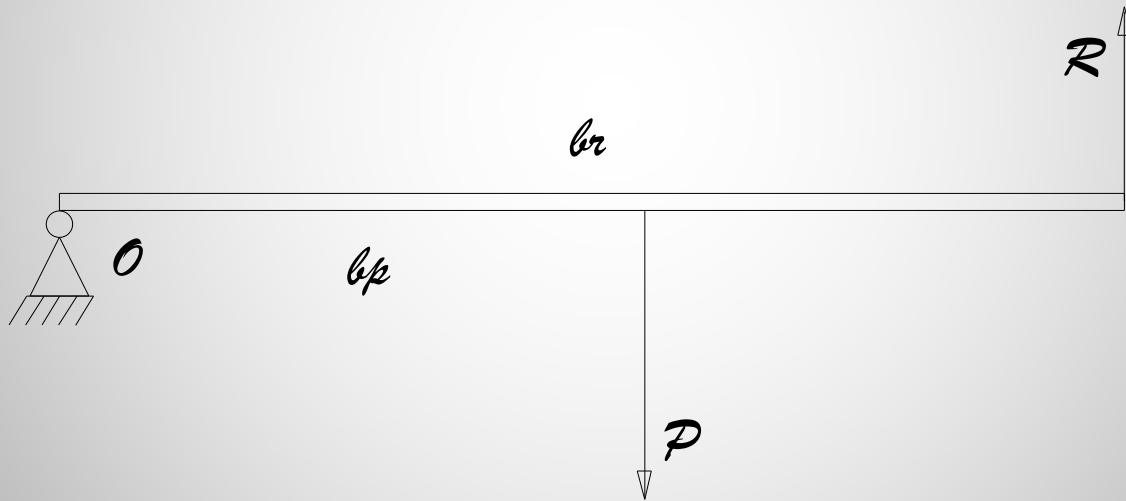


Segue: $R/P = b_p/b_r > 1$ perché b_p/b_r è sempre > 1

La leva è del terzo genere

quando il fulcro è ad un'estremità e la potenza è applicata tra il fulcro e la resistenza.

Questo tipo di leva è sempre svantaggiosa, infatti per l'equilibrio dei momenti si ha: $R \times l_r - P \times l_p = 0$ e $R \times l_r = P \times l_p$



Segue: $R/P = l_p/l_r < 1$ perché l_p/l_r è sempre < 1

La Carrucola

La carrucola è costituita da una ruota infulcrata ad una staffa con una gola periferica nella quale scorre una fune o una catena.

Se è fissa, la staffa sarà solidale ad un sostegno e la fune penzola nella gola da entrambe le parti della ruota, da un capo della fune agirà una forza motrice (potenza) e l'altro sarà bilanciato dal carico resistente.

La carrucola è un dispositivo che deriva dalla leva di primo genere (vedi esposizione n. 3) con le forze equivalenti e i bracci uguali al raggio della ruota. Ha $\mathcal{K} = 1$, equilibrio indifferente.

È una macchina semplice che rende più agevole la movimentazione dei carichi ma non fa "sconti" energetici.

La Carrucola Mobile

Essa ha un estremo della fune fissato ad un sostegno e all'altro è applicata la potenza motrice, i carichi resistenti sono appesi al gancio della staffa nella quale è infulcrata la ruota con scanalatura annessa, alloggiante la fune.

Essa, è una macchina semplice vantaggiosa ($\mathcal{K}=1$) derivante dalla leva di secondo genere con il braccio della potenza uguale al doppio del raggio della ruota (diametro) e del braccio della resistenza.

Con riferimento all'esposizione n.5, si ha:

$P \times l_p - R \times l_r = 0$ da cui segue $P = R \times l_r / l_p$ e siccome $l_r = 1/2 l_p$ ne

consegue: $P = R \times 1/2 \times l_p / l_p = R / 2$

è evidente che per equilibrare R occorre metà P .

$\mathcal{K} = R/P = R/(R/2) = 2R/R = 2$, è vantaggiosa ($\mathcal{K}>1$)

Il Paranco Semplice

Esso è un'altra macchina semplice derivata dalla leva ed è costituita dalla carrucola fissa accoppiata a quella mobile per cui valgono tutte le considerazioni già fatte.

È vantaggioso come la carrucola mobile in quanto, essendo composto dalla carrucola fissa con $K_f > 1$ e da quella mobile con $K_m > 2$, si avrà un vantaggio $K = K_f \times K_m = 1 \times 2 = 2$

È ancora valida la $P = R/2$

Per aumentare il vantaggio, quindi, devo aumentare il numero "n" delle carrucole fisse e mobili, ne consegue che:

$K = 2n$ e essendo $K = R/P$,

la forza motrice varrà $P = R/2n$

La forza motrice si può frazionare a piacimento con l'aumentare delle carrucole.

Il Verricello

Questa macchina semplice deriva dalla leva di secondo genere per l'appunto vantaggiosa.

Il verricello ha l'asse di rotazione orizzontale, è costituito da un tamburo cilindrico di raggio "r" sul quale si svolge una fune fissata ad esso, l'altro capo della fune solleva il carico "R" resistente.

La forza motrice "P" agisce sull'estremità di una manovella con braccio "bp" solidale con il tamburo.

Dall'equilibrio intorno all'asse del tamburo si ha:

$$P \times b_p - R \times r = 0 \text{ da cui } P = R \times r / b_p$$

$$K = R/P = b_p / r$$

Quindi, più è lungo il braccio della manovella rispetto al raggio del tamburo e più aumenta il vantaggio.

L' Argano

È una macchina semplice che deriva dalla leva di secondo genere per l'appunto vantaggiosa.

L' argano ha l'asse di rotazione verticale (di solito è fissato in terra, nei porticcioli o sulle spiagge, per tirare le imbarcazioni dal mare), nel funzionamento, è simile al verricello. Ha un grosso tamburo sul quale si avvolge una fune trainante il carico resistente "R" per mezzo di due (o quattro) barre di manovra solidali al tamburo stesso.

La forza motrice "P" agisce sull'estremità delle barre di manovra con un braccio "bp". Dall'equilibrio intorno all'asse verticale del tamburo:

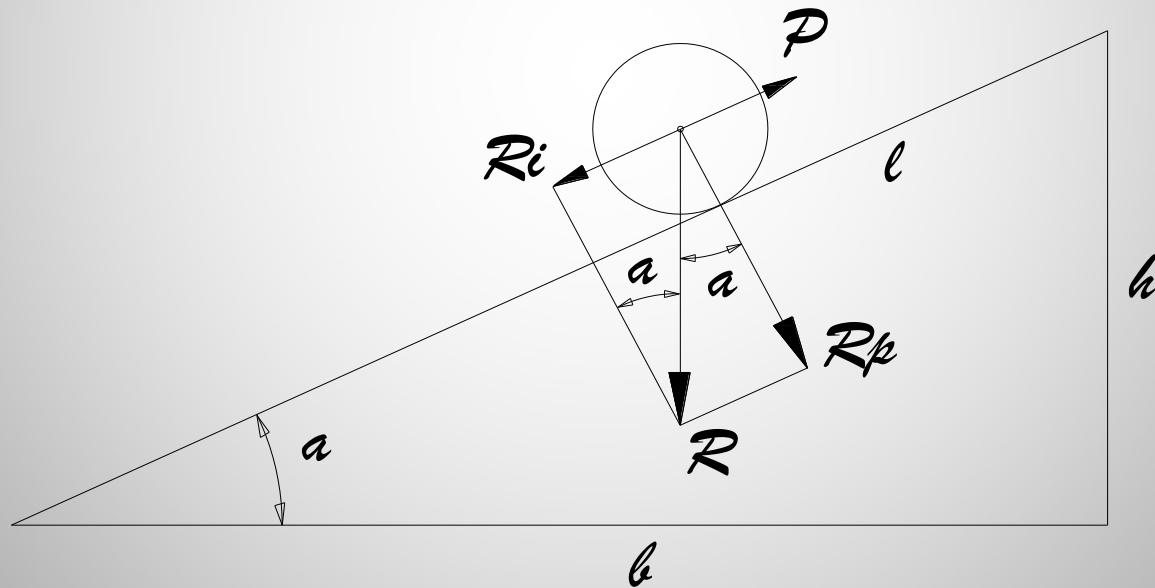
$$R \times r - 2 \times P \times bp = 0 \quad \text{da cui } P = R \times r / 2bp$$

$$K = R/P = 2bk/r, \quad \text{per quattro barre, sarà } = 4bk/r$$

Quindi, più è lungo il braccio della barra di manovra e più numerose sono e più aumenta il vantaggio.

Il Piano Inclinato

Si può schematizzare con un triangolo rettangolo di altezza "h", il cui piano è l'ipotenusa "l", inclinato dell'angolo "a" rispetto alla base "b".
La pendenza "i" è il rapporto tra l'altezza e la base, cioè la tangente dell'angolo d'inclinazione "a": $i = \tan a = h/b$.



Se la forza motrice "P" è parallela al piano inclinato il carico "R" diretto come la forza di gravità si scompone in due componenti, una parallela al piano inclinato e opposta alla forza motrice e l'altra perpendicolare al piano stesso.

Considerando che l'angolo "a" è uguale, per la similitudine dei triangoli, anche negli altri triangoli costruiti, possiamo calcolare il modulo dei vettori componenti facendo uso della trigonometria:

$$R_p = R \cos a = 0$$

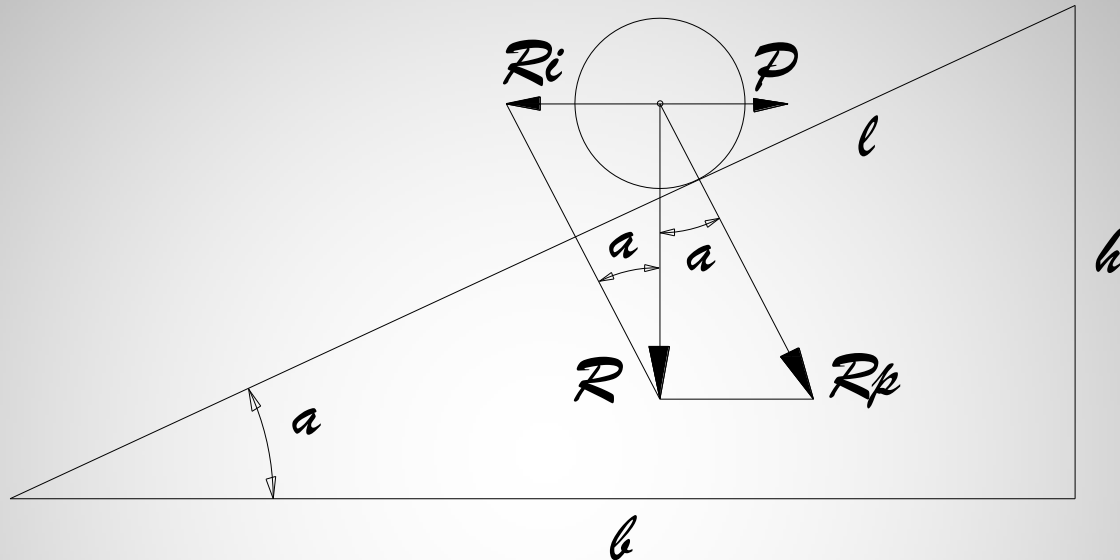
questa forza resistente non ha alcun effetto sul moto perché è annullata dalla reazione del piano inclinato che fa d'appoggio,

$$R_i = R \sin a = P$$

quest'altra, invece, è l'unica forza resistente rimasta dovrà equilibrare la potenza.

Inoltre, essendo "h=l. sena" segue che $\sin a = h/l$ da cui $P = R \times h/l$

Forza motrice parallela alla base del piano inclinato



Il caso in studio è identico a quello precedente, valgono le stesse considerazioni, tranne per i risultati trigonometrici:

$\text{tag } a = P/R$ da cui $P = \text{tag } a \times R$ e quindi

$$P = R \times h/b$$

Il Vantaggio "K" Conclusioni

Nel primo caso, forza motrice parallela al piano inclinato, l'angolo d'inclinazione, essendo compreso tra $0^\circ \leq a < 90^\circ$, la macchina è sempre vantaggiosa ($K > 1$) essendo "sen a" sempre < 1 ,

$$\text{infatti, } K = R/P = 1/\text{sen } a > 1$$

Quando $a = 90^\circ$, $\text{sen } a = 1$, $K = 1$ è indifferente e $P=R$

Forza motrice parallela alla base del piano inclinato

$$K = R/P = 1/\text{tag } a > 1$$

per $a < 45^\circ$, $\text{tag } a < 1$ e $K > 1$, vantaggiosa

per $a = 45^\circ$, $\text{tag } a = 1$ e $K=1$, indifferente

per $45^\circ < a < 90^\circ$, $\text{tag } a > 1$ e $K < 1$, svantaggiosa

Il Cuneo

È una macchina semplice equivalente ad un doppio piano inclinato, la forza motrice agisce perpendicolarmente alla testa mentre la resistente preme sui fianchi che generano le reazioni del corpo. Il cuneo è sempre tanto più vantaggioso quanto più piccolo è l'angolo del tagliente, cioè più acuto. Il vantaggio dipende anche dal rapporto tra la larghezza della testa (lt) e la lunghezza dei fianchi (lf): $P/R = lt/lf$.

La Vite

Sviluppando la filettatura di una vite si ottiene un piano inclinato di altezza "h" pari al passo e di base "b" pari $2\pi r$ (circonferenza).

La forza motrice è parallela alla base, la resistenza agisce lungo l'asse:

$$P/R = h/b = \text{Passo}/2\pi r = \tan a$$

$$\text{Il vantaggio} = K = R/P = 1/\tan a = 2\pi r/\text{Passo}$$

Infine,

gli argomenti non si esauriscono qui, ma saranno ripresi con le esercitazioni scritte e pratiche, specifiche sui temi trattati, da svolgere in classe durante l'orario scolastico.

Gli esercizi completeranno la lezione con i richiesti approfondimenti, previo la lettura di tabelle e diagrammi specifici dei costruttori, la consultazione del Manuale di Meccanica e le riflessioni sul libro di testo e, all'occorrenza, ricerche su internet, senza limitare, ovviamente, la frequenza dei laboratori.

Le lezioni frontali e i compiti in classe arricchiranno ulteriormente la trattazione, anche se, ulteriori approfondimenti, esulano dalla presente trattazione.